www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Session 1989

CONCOURS DE RECRUTEMENT

D'ELEVES PILOTES DE TRANSPORT (E.P.T./S/) — (Mathématiques supérieures)

Durée : 4 h — Coefficient : 7

Les candidats doivent traiter deux problèmes et seulement deux ; ils indiqueront, en tête de leur copie, les numéros de problèmes qu'ils ont choisi de traiter et qui seront les seuls à être corrigés.

Problème I (analyse)

Dans ce problème, le corps de base est celui des nombres réels.

I - 1. Etablir la convergence de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

I - 2. Soit $a > 0$. On pose : $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

et on considère les trois intégrales doubles :

$$J(a) = \iint f(x,y)\,dx\,dy, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant a^2.$$

$$I(a) = \iint f(x,y)\,dx\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a.$$

$$K(a) = J(a\sqrt{2}).$$

a) Dessiner les domaines d'intégration respectifs de J(a), I(a), K(a).

b) Montrer que : $J(a) \leqslant I(a) \leqslant K(a)$.

c) Exprimer I(a) à l'aide de l'intégrale $\int_0^a e^{-x^2}dx = g(a)$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

Calculer J(a) et K(a) et en déduire un encadrement de g(a).

d) En déduire la valeur de l'intégrale I, que l'on exprimera à l'aide de π.

I - 3. Le but des questions I-3 à I-7 inclus est de retrouver le résultat de I-2 d) *sans recourir* aux fonctions de deux variables.

n désignant un entier positif ou nul, on pose : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$.

a) Calculer a_0 et a_1.

b) Démontrer l'inégalité stricte : $0 < a_{n+1} < a_n$.

c) En supposant $n \geqslant 2$, former une relation de récurrence liant a_n et a_{n-2}.

d) Montrer que, si $n \geqslant 1$, on a l'égalité :

$$n\,a_n\,a_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

e) On suppose toujours $n \geqslant 1$. A l'aide de l'inégalité :

$$a_{n+1} < a_n < a_{n-1},$$

déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

f) A l'aide des résultats précédents, déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et déterminer un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I - 4. Soit x élément de $]-1, +\infty[$. On pose :

$h(x) = x - \ln(1+x)$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Etudier les variations de h sur $]-1, +\infty[$. Quelle inégalité en déduit-on ?

I - 5. On pose, n désignant un entier strictement positif :

$$b_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx,$$

$$c_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

a) Etablir la convergence de l'intégrale c_n.

b) En employant, notamment, l'inégalité trouvée dans la question I-4, démontrer la double inégalité :

$$b_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant c_n.$$

I - 6. A l'aide de changements de variable convenablement choisis, exprimer b_n et c_n à l'aide des intégrales a_{2n+1} et a_{2n-2}.

I - 7. A l'aide des résultats précédents, retrouver la valeur de I calculée en I-2.d.

T.S.V.P

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE: Pilotes

Problème II (algèbre)

Dans tout ce problème, le corps de base est celui des nombres complexes. n désigne un entier tel que $n \geqslant 2$. Les matrices envisagées sont toutes à n lignes et n colonnes.

Pour exprimer que l'élément (p,q) d'une matrice A, intersection de la ligne p et de la colonne q (où $1 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$) est égal à α_{pq}, on écrit : $A = \left(\!\left(\alpha_{pq}\right)\!\right)$.

Le déterminant de A est noté dét A ; la matrice imaginaire conjuguée de A est notée $\overline{A}$, et, si elle existe, la matrice inverse de A est notée A^{-1}. La matrice-unité à n lignes et n colonnes est notée I ; on rappelle que tous ses termes sont nuls, sauf ceux de sa diagonale principale, qui sont tous égaux à 1.

$a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ étant n complexes, on pose :

$V_n (a_1 , a_2 , \ldots , a_n) = \left(\!\left(\alpha_{pq}\right)\!\right)$, où $\alpha_{pq} = a_q^{p-1}$.

$b_1 , b_2 , \ldots b_n$ étant encore n complexes, on pose :

$K_n(b_1 , b_2 , \ldots b_n) = \left(\!\left(\alpha_{pq}\right)\!\right)$, où :

$\alpha_{pq} = b_{q-p+1}$ si $q \geqslant p$, $\alpha_{pq} = b_{n+q-p+1}$ si $q < p$.

Par exemple : $K_3(b_1 , b_2 , b_3) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 \end{bmatrix}$.

On pose enfin : $\tau_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$,

où i désigne l'élément du corps des complexes dont le carré est -1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$, et :

$U_n = V_n(1, \tau_n , \tau_n^2 , \ldots \tau_n^{n-1})$.

Par exemple : $U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$.

Le but du problème est d'établir quelques propriétés des matrices U_n et $K_n(b_1 , b_2 , \ldots b_n)$.

La question II-3 est sans incidence sur la question II-4.

II - 1. Montrer que, quels que soient les complexes $a_1 , a_2 , \ldots a_n$, on a :

$$\text{dét } V_n(a_1 , a_2 , \ldots a_n) = \prod_{\substack{p<q \\ 1\leqslant p\leqslant n-1 \\ 2\leqslant q\leqslant n}} (a_q - a_p)$$

où $\prod$ désigne le produit des termes $(a_q - a_p)$.

II - 2. Calculer $U_n \overline{U}_n$. En déduire que U_n est inversible, et déterminer U_n^{-1} .

Calculer $|\text{dét } U_n|^2$, puis $|\text{dét } U_n|$.

II - 3. a) p et q étant toujours des entiers, on pose : $C_n = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} (p+q)$.

Calculer C_n en remarquant que : $\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n \\ 1\leqslant q\leqslant n}} (p+q) = 2\, C_n + 2 \sum_{p=1}^{n} p$.

On pourra s'aider d'une figure en portant p en abscisse et q en ordonnée.

b) En utilisant la formule du II-1, ainsi que l'égalité :

$$e^{i\alpha} - 1 = 2i\, e^{\frac{i\alpha}{2}} \sin\frac{\alpha}{2} ,$$

montrer qu'un argument de dét U_n est $(3n-2)(n-1)\frac{\pi}{4}$.

II - 4. Dans cette question, $b_1 , b_2 , \ldots , b_n$ sont des complexes quelconques. On leur associe le polynôme ϕ défini par : $\phi(z) = b_1 + b_2 z + \ldots + b_n z^{n-1}$.

a) Calculer la matrice $K_n(b_1 , b_2 \ldots , b_n)U_n$. En posant :

$K_n(b_1 , b_2 , \ldots , b_n)\, U_n = \left(\!\left(\gamma_{pq}\right)\!\right)$,

on exprimera simplement γ_{pq} à l'aide de $\tau_n^{(p-1)(q-1)}$ et de $\phi(\tau_n^{q-1})$.

b) Calculer $U_n^{-1}\, K_n\, (b_1 , b_2 , \ldots , b_n)\, U_n$.

c) Quelles sont les valeurs propres de $K_n(b_1 , b_2 , \ldots , b_n)$? Cette matrice est-elle diagonalisable ?
Calculer dét $K_n(b_1 , b_2 , \ldots , b_n)$.

T.S.V.P

Problème III (géométrie)

Le plan euclidien de la géométrie usuelle est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox, Oy.

A tout point M du plan, de coordonnée (x,y), on associe son affixe : $z = x + iy$, où i est l'élément du corps des complexes dont la définition est rappelée dans le préambule du problème II.

n désigne un entier tel que $n \geqslant 2$. La distance de deux points A et B est notée AB.

L'objet du problème est l'étude de la courbe (C_n) ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité : $\prod_{k=0}^{n-1} M A_k = 1$, où $\prod$ est le produit des distances $M A_k$ et où A_k est le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

III - 1. Montrer que $0 \in (C_n)$.

Montrer que (C_n) admet n axes de symétrie, que l'on précisera, en tenant compte de la parité de n.

Montrer que (C_n) est sa propre image dans toute rotation de centre O et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$, où k est un entier relatif.

III - 2. Dans cette question et dans la suivante, $n = 2$.

a) Déterminer une équation cartésienne de (C_2), mise sous forme entière. Vérifier que (C_2) est une courbe de degré 4.

b) On passe en coordonnées polaires, en posant, pour tout point M autre que O, de coordonnées (x,y) :

$x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, avec $\rho > 0$ et $-\pi \leqslant \theta < \pi$.

Ecrire une équation de (C_2) en coordonnées polaires, que l'on mettra sous la forme : $\rho^2 = f_2(\theta)$, f_2 étant à préciser.

c) En supposant $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, mettre cette équation sous la forme $\rho = g_2(\theta)$, et construire l'arc correspondant de (C_2). En déduire le tracé complet de la courbe. L'étude du sens de concavité n'est pas demandée ici.

d) Calculer l'aire S_2 d'une des deux boucles de (C_2).

III - 3. A tout point M du plan, autre que O, de coordonnées (x,y), on associe le point M' de coordonnées (x',y') telles que : (R) $x' + iy' = \frac{1}{x-iy}$.

a) Calculer x' et y' en fonction de x et de y ; vérifier que O, M, M' sont alignés ; calculer le produit des distances OM et OM'.

b) La relation (R) définit une application, notée (J), du plan privé de O dans lui-même.

Former une équation de l'image (H) de $(C_2) - \{0\}$ par (J).
Reconnaitre la nature de (H), que l'on dessinera.

III - 4. Dans cette question et dans les suivantes, $n \geqslant 2$ est quelconque.

a) Quelle est la factorisation sur $\mathbb{C}$ du polynôme P_n défini par : $P_n(z) = z^n - 1$?

b) En utilisant l'égalité, valable pour tout point M du plan, d'affixe z :

$M A_k = |z - z_k|$,

écrire une équation polaire de (C_n), que l'on mettra sous la forme : $\rho^n = f_n(\theta)$, où f_n est une fonction très simple, que l'on précisera.

III - 5. a) En supposant $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2n}$, mettre l'équation de (C_n) sous la forme : $\rho = g_n(\theta)$, et construire l'arc correspondant de (C_n). En déduire l'allure d'ensemble de (C_n). Dessiner (C_3) et (C_4).

b) Montrer qu'en tout point tel que $g_n'(\theta) \neq 0$, on a :

$$\frac{g_n^2(\theta) + 2g_n'^2(\theta) - g_n(\theta)\, g_n''(\theta)}{g_n'^2(\theta)} \geqslant \frac{n}{\sin^2 n\theta} + 1 .$$

Que peut-on en déduire pour le sens de concavité de (C_n) ?

III - 6. On appelle S_n l'aire d'une boucle de (C_n). On se propose d'étudier $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} n S_n$.

a) Majorer S_n en faisant intervenir un triangle isocèle convenablement choisi. On s'aidera des figures obtenues en III-5.a).

En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

b) Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale simple.

En s'aidant d'un changement de variable bien choisi, déterminer $\lim_{n \to +\infty} n S_n$.

——=ooo=——

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail